数理解析研究所講究録
697 巻 1989 年 16-23

Free Regular Bands and Free Regular $*$-Bands

立命大・理工　中嶋　史図雄(Sizuo Nakajima)

band B が恒等式 ($xyx=yx$, $xyx=xy$) $xyxzx=xyzx$ をみたすとき, (right regular , left regular) regular band という. 最近, Gerhard and Petrich [1] は free band と free $*$-band の新しい表現を与えた.

本講演の目的はこの方法を用いて, free regular band と free regular $*$-band を表現し, その構造定理を与える事である.

§1　free regular band の表現

ここでは free (right , left) regular band の表現を考える.

X を集合, $F=F(X)$ を X 上の free semigroup とし, $w\in F$ に対し, $C(w)$ を w の content (w に現われる文字の集合) とする. $w=uxp$, $C(w)=C(ux)$, $C(w)\supsetneq C(u)$, $x\in X$ と表わせるとき, u を $s(w)$, x を $\sigma(w)$ と表わす。

以下, s, σ を F 上の作用素とみなす. さらに s, σ を

次のように拡張する：

$$s^0(w) = w$$

$$s^{k+1}(w) = s(s^k(w)) \quad , \quad \sigma^{k+1}(w) = \sigma(s^k(w)) .$$

σを用いて，$l : F \longrightarrow F$を

$$l(w) = \sigma^{|C(w)|}(w)\,\sigma^{|C(w)|-1}(w) \cdots \sigma^2(w)\,\sigma(w)$$

と定義する．lはF上の自己準同形である．$\delta : F \longrightarrow F$を

$$\delta(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_n \cdots x_2 x_1 \quad (x_i \in X)$$

とし，$r : F \longrightarrow F$，$k : F \longrightarrow F$をそれぞれ$r = \delta l \delta$，$k(w) = l(w) r(w)$と定義する．r，kはF上の自己準同形である．

$L(X) = l(F)$，$R(X) = r(F)$，$K(X) = k(F)$とおき，乗法をそれぞれ次のように定義する：

$$u . v = l(uv) \qquad (u, v \in L(X))$$

$$u . v = r(uv) \qquad (u, v \in R(X))$$

$$u . v = k(uv) \qquad (u, v \in K(X)) .$$

このとき，free (right, left) regular bandの表現を得る．

定理1 (c.f. Yamada [4])

(1) lはFから$L(X)$上への準同形で，$L(X)$はX上のfree left regular bandである．

(2) rはFから$R(X)$上への準同形で，$R(X)$はX上のfree right regular bandである．

(3) k は F から $K(X)$ 上への準同形で，$K(X)$ は X 上の free regular band である．

§2. free regular band の構造

中嶋 [2] の方法を用いて，free regular band の構造を記述する．

left regular band の構造定理（中嶋 [2]）：

Y を semilattice とし，各 $\alpha \in Y$ に対し，L_α を $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$ if $\alpha \neq \beta$ なる空でない集合とする．$\alpha \geqq \beta$ に対して，次の 3 条件をみたす L_β 上の同値関係 π_β^α が与えられているとする：

(i) $\pi_\alpha^\alpha = \omega_\alpha$，$L_\alpha$ 上の全関係，

(ii) $\pi_\gamma^\alpha \subseteqq \pi_\gamma^\beta \quad (\alpha \geqq \beta \geqq \gamma)$，

(iii) $C(\pi_\gamma^\alpha) = \bigcap_{\beta \geqq \gamma} C(\pi_\gamma^\alpha \mid \pi_\gamma^\beta) \neq \emptyset$，

ただし，$C(\pi_\gamma^\alpha \mid \pi_\gamma^\beta) = \{\mathfrak{X} \in C(\pi_\gamma^\alpha) \mid \pi_\gamma^\beta|_\mathfrak{X} = \pi_\gamma^{\alpha\beta}|_\mathfrak{X}\}$．

さらに，$\alpha \geqq \beta$ に対し次の 3 条件をみたす写像 $f_{\alpha,\beta} : L_\alpha \longrightarrow C(\pi_\beta^\alpha)$ が与えられているとする：

(iv) $f_{\alpha,\alpha} = 1_{L_\alpha}$，

(v) $f_{\alpha,\beta} f_{\beta,\gamma} \subseteqq f_{\alpha,\gamma} \quad (\alpha \geqq \beta \geqq \gamma)$，

(vi) $f_{\beta,\gamma}$ が π_β^α-π_γ^α preserving．

このとき，$L = \bigcup_{\alpha \in Y} L_\alpha$ 上に乗法を

$$a_\alpha a_\beta = (a_\alpha f_{\alpha,\alpha\beta}) \cap (a_\beta f_{\beta,\alpha\beta}) \pi_{\alpha\beta}^\alpha$$

と定義すると，L は left regular band である．逆に，すべての left regular band はこんな風にして得られる．

上の left regular band L を $L=L[f_{\alpha,\beta}:\pi_\beta^\alpha, L_\beta:Y]$ と表わす．双対的に，right regular band $R=R[g_{\alpha,\beta}:\tau_\beta^\alpha, R_\beta:Y]$ も定義できる．regular band K は $K=L\bowtie R$ と表わせる．

free left (right) regular band $L(X)$ ($R(X)$) をこの構造定理によって記述する．

Y を X 上の free semilattice (すなわち，$Y=\{A\in 2^X \mid 0<|A|<\infty\}$ $A\cdot B=A\cup B$) とする．$A\in Y$ に対し，$P_A=\{w\in F \mid l(w)=w,\ C(w)=A\}$ とおくと，P_A は A 上の permutable word の全体である．$A,B\in Y$，$A\subseteq B$ に対し，P_B 上の同値関係 π_B^A を

$$u\ \pi_B^A\ v \iff u\backslash A = v\backslash A$$

ただし $u\backslash A$ は u から A の文字を除いた語

と定義する．$C(\pi_B^A)=\{uP_{B\backslash A}, P_{B\backslash A}u \mid u\in P_A\}$ で，

$f_{A,B}:P_A\to C(\pi_B^A)$，$u\longmapsto uP_{B\backslash A}$ ($g_{A,B}:P_A\to C(\pi_B^A)$，$u\longmapsto P_{B\backslash A}u$)

と定義すると，$\{\pi_B^A, f_{A,B}\}$ ($\{\pi_B^A, g_{A,B}\}$) は条件(i)〜(vi) をみたす．従って，次の定理を得る．

定理２　$L(X)\cong L[f_{A,B}:\pi_B^A, P_B:Y]$．

$$R(X) \cong R[g_{A,B};\pi_B^A, P_B : Y] \cong L(X)^d$$
$$K(X) \cong L(X) \bowtie L(X)^d$$

§3　free regular $*$-band の構成.

involution $*$ をもつ半群を involutorial 半群という．さらに regular band B が involutorial 半群で $x = xx^*x$ をみたすとき regular $*$-band という.

free regular $*$-band の表現の基礎は free involutorial 半群 $F^* = F^*(X)$ である. $I = X \cup X^*$ (ただし, X と X^* は $x \longmapsto x^*$ により1対1対応している)とする. I上の free semigroup $F(I)$ 上に $*$ 演算を次のように入れる:

$$(i_1 i_2 \cdots i_n)^* = i_n^* \cdots i_2^* i_1^* \quad (i_1 i_2 \cdots i_n \in F(I))$$

$$\text{ただし}\quad i^* = \begin{cases} x^* & (i = x \in X) \\ x & (i = x^* \in X^*) \end{cases}.$$

$(F(I), *)$ は X 上の free involutorial 半群である.

§1 の analogy を用いて, free regular $*$-band の表現を与える.

$w \in F^* = F(I)$ に対し, $C_X(w) = \{x \in X \mid C(w) \cap \{x, x^*\} \neq \emptyset\}$ とおく. $w = uip$, $C_X(w) = C_X(ui)$, $C_X(w) \neq C_X(u)$, $i \in I$ と表わせるとき, u を $S_X(w)$, i を $\sigma_X(w)$ と書く. S_X, σ_X を $S_X^0(w) = w$, $S_X^{k+1}(w) = S_X(S_X^k(w))$, $\sigma_X^{k+1}(w) = \sigma_X(S_X^k(w))$

と拡張し，$l^*: F^* \longrightarrow F^*$ を

$$l^*(w) = \sigma_X^{|C_X(w)|}(w)\,\sigma_X^{|C_X(w)|-1}(w)\cdots\sigma_X^2(w)\,\sigma_X(w),$$

$k^*: F^* \longrightarrow F^*$ を $k^*(w) = l^*(w)[l^*(w^*)]^*$ と定義する．l^*, k^* は F^* の自己 $*$-準同形である．

$K^* = K^*(X) = k^*(F^*)$ とおき，K^* 上に演算を $u.v = k^*(uv)$ で定義すると，free regular $*$-band の表現が得られる．

定理3. k^* は F^* から K^* 上への $*$-準同形で，K^* は X 上の free regular $*$-band である。

K^* と $k(F(I))$ との関係

次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
F^* = (F(I), *) \arrow[d, "k"] \arrow[drr, "k^*"] & & \\
(k(F(I)), *) \arrow[rr, "k^*|k(F(I))"'] & & K^* = (k^*(F^*), *)
\end{tikzcd}$$

k は $*$-演算を保存し，$k^*|k(F(I))$ は K^* の上への $*$-準同形でこれより導かれる合同は $\{(u, uu^*u) \mid u \in k(F(I))\}^\#$ である．

regular $*$-band の構造 (Scheiblich [3])

$L = L[f_{\alpha,\beta} : \pi^{\alpha}_{\beta}, L_{\beta} ; Y]$ を left regular band とし，$L \bowtie L^d$ 上に $*$-演算を $(a, b)^* = (b, a)$ と定義すると，$(L \bowtie L^d, *)$ は regular $*$-band になる．逆に，すべての regular $*$-band はこんな風にして得られる．

この $L \bowtie L^d$ を $K^*[f_{\alpha,\beta} : \pi^{\alpha}_{\beta}, L_{\beta} ; Y]$ と書く．ここで，free regular $*$-band の構造定理を与える．

Y を X 上の free semilattice とする．$A \in Y$ に対し，$P^*_A = \{ w \in F^* \mid \ell^*(w) = w,\ c_X(w) = A \}$ とおく．$A, B \in Y$ $A \subseteq B$ に対し，P^*_B 上の同値関係 $\overset{*}{\pi}{}^A_B$ を

$$u \ \overset{*}{\pi}{}^A_B \ v \iff u \setminus A \cup A^* = v \setminus A \cup A^*$$

で定義する．$C(\overset{*}{\pi}{}^A_B) = \{ uP^*_{B \setminus A}, P^*_{B \setminus A}u \mid u \in P^*_A \}$ である．$f^*_{A,B} : P^*_A \longrightarrow C(\overset{*}{\pi}{}^A_B)$ を $u \longmapsto uP^*_{B \setminus A}$ と定義すると，$\{\overset{*}{\pi}{}^A_B, f^*_{A,B}\}$ は条件(i)〜(vi)をみたす．従って，次の定理を得る．

定理4.

$\chi^* : F^* \ni w \longmapsto (\ell^*(w), [\ell^*(w^*)]^*) \in K^*[f^*_{A,B} : \overset{*}{\pi}{}^A_B, P^*_B ; Y]$ は上への $*$-準同形で，$\chi^* \circ \chi^{*-1} = \kappa^* \circ \kappa^{*-1}$．従って，

$$K^*(X) \overset{*}{\cong} K^*[f^*_{A,B} : \overset{*}{\pi}{}^A_B, P^*_B ; Y].$$

参考文献

[1] J. A. Gerhard and M. Petrich, Free bands and Free *-bands, Glasgow Math. J. 28 (1986) 161–179.

[2] S. Nakajima, Some results on right inverse semigroups, Proc. 9th Symposium on Semigroups, Naruto Univ., (1985) 24–27.

[3] H. E. Scheiblich, Projective and Injective Bands with Involution, J. Algebra 109, (1987) 281–291.

[4] M. Yamada, The structure of separative bands, Doctoral Dissertation, Univ. of Utah, 1962.